Решения Межрегиональной заочной олимпиады 2010 года

Вариант 7 класса
Задания по математике
(на конверте указывается – М 7)

1. Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое.

Обозначим начальную дробь - $\frac{m}{n}$, где
m – числитель дроби,
n – знаменатель дроби.
Тогда новый числитель будет равен:

$$m' = m + \frac{20}{100} \cdot m = (1 + 0.2) \cdot m = 1.2m$$

Если знаменатель уменьшится на *100x* процентов, то его можно будет записать:

$$n' = n - \frac{x}{100} \cdot n = (1 - x) \cdot n$$

Учитывая, что в итоге дробь возросла вдвое, составим уравнение:

$$\frac{(1.2m)}{[(1 - x) \cdot n]} = \frac{2m}{n}$$

$$\frac{1.2}{(1 - x)} = 2$$

$$1 - x = \frac{1.2}{2}$$

$$1 - x = 0.6$$

$$x = 0.4$$

Значит, знаменатель дроби нужно уменьшить на

$$100 \cdot 0.4 = 40\ \%$$

Ответ: 40%

2. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного—за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

Составим схему

Кран	*Скорость наполнения, доли*	*Время наполнения, мин*	*Объем ванны*
Горячий	$\frac{1}{23}$	*23*	*1*
Холодный	$\frac{1}{17}$	*27*	*1*

Пусть через *x* минут Маша открыла холодный кран,

Тогда *y* – время наполнения ванны водой из обоих кранов.

В соответствии с таблицей и условиями задачи составим уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{23}\cdot x + \left(\frac{1}{23} + \frac{1}{17}\right)\cdot y = 1 \\ \frac{1}{23}\cdot(x + y) = 1.5\cdot\frac{1}{17}\cdot y \end{cases}$$

Умножим оба уравнения на 23 и на 17, получим:

$$\begin{cases} 17x + 40\cdot y = 391 \\ 17\cdot(x + y) = 34.5\cdot y \end{cases} \quad \begin{cases} 17x + 40\cdot y = 391 \\ 68\cdot(x + y) = 69\cdot y \end{cases} \quad \begin{cases} 17x + 40\cdot y = 391 \\ 68\cdot x = y \end{cases}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$17x + 40\cdot(68\cdot x) = 391$$

$$x + 160x = 23$$

$$161\cdot x = 23$$

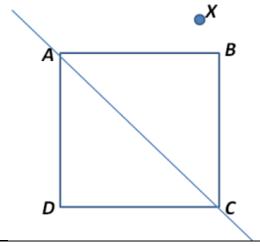
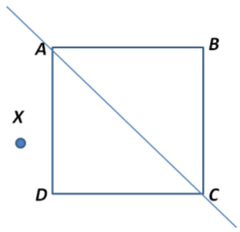
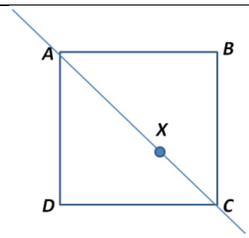
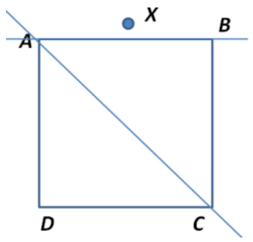
$$x = \frac{1}{7}$$

Ответ: через 7 минут Маша открыла холодный кран.

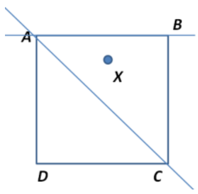
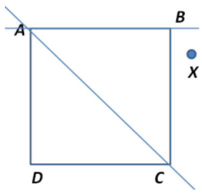
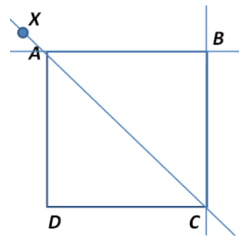
3. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он говорит, лежит ли точка на прямой, а если не лежит, то говорит, по какую сторону от этой прямой лежит невидимая точка. Какое наименьшее число прямых необходимо провести, чтобы узнать, лежит ли невидимая точка внутри квадрата?

Решение:

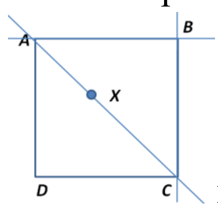
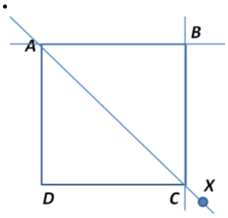
Пусть наш квадрат - ABCD.

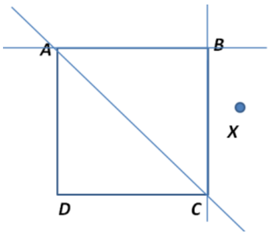
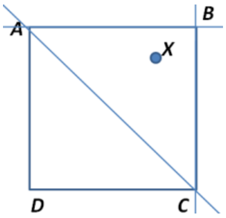
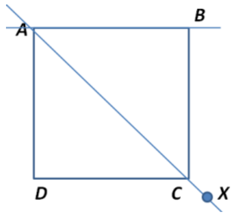
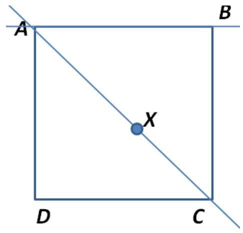
<table>
<tr><td colspan="3">1. шаг: Проводим прямую АС. Человек в специальных очках указывает одну из полуплоскостей (рис. а, б) или саму прямую (рис. В).</td></tr>
<tr><td>а</td><td>б</td><td>в</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Полуплоскость содержит точку Х</td><td>Полуплоскость не содержит точку Х</td><td>Точка Х лежит на прямой АС</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. шаг:</td></tr>
<tr><td>Проводим прямую АВ. Человек в специальных очках указывает, что</td><td>Проводим прямую AD. Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю</td><td>Проводим прямую АВ. Человек в специальных очках указывает, что</td></tr>
<tr><td>А) точка лежит выше прямой ВС.


Вывод: точка лежит вне квадрата.

Б) Человек указывает, что точка лежит ниже прямой ВС. Возможны варианты:

 Или 
</td><td></td><td>А) точка лежит выше прямой ВС.


Вывод: точка лежит вне квадрата

Б) Человек указывает, что точка лежит ниже прямой ВС. Возможны варианты:

 или 
</td></tr>
<tr><td>3. шаг:</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Проводим прямую BC. Человек в специальных очках указывает, что А) точка лежит правее прямой BC.  **Вывод: точка не лежит внутри квадрата** Б) точка лежит левее прямой BC.  	Если это - полуплоскость, не содержащая вершину B, то на втором и третьем шагу проводим прямые AD и CD.	Проводим прямую BC. Человек в специальных очках указывает, что А) точка лежит правее прямой BC.  **Вывод: точка не лежит внутри квадрата** Б) точка лежит левее прямой BC.  **Вывод: точка лежит внутри квадрат**

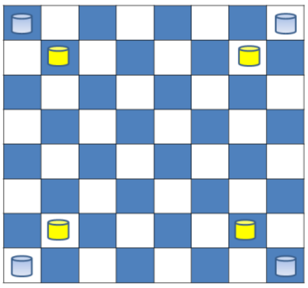
Итак, чтобы узнать, лежит ли невидимая точка внутри квадрата необходимо провести 3 прямые.

Если задано всего один или два вопроса, то проведено меньше трех прямых (две или одна). Каковы бы ни были ответы, мы можем узнать только, принадлежит ли точка тем частям, на которые плоскость разбита проведенными прямыми. Но эти части неограниченны, и принадлежность им не может быть доказательством того, что точка принадлежит квадрату.

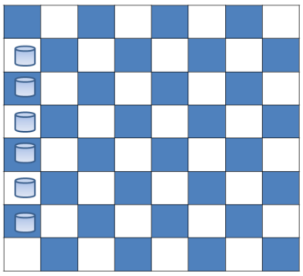
4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга (не стояли на соседних клетках)? (Расстановки, при которых черный и белый короли меняются местами, считаются разными).

Решение:

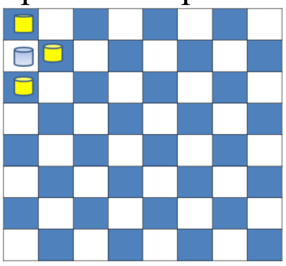
Если одного из королей поставить по углам шахматной доски, то второй король будет бить его в 2-х случаях, а не будет его бить в *4 • 60* случаях (4 угла и 64 – 4 = 60 клеток, в которых может стоять второй король, чтобы он не бил первого, так как на трех соседних второй будет бить первого).



Если одного короля поставить по краям шахматной доски (кроме углов), то таких клеток наберется 6 • 4 = 24,

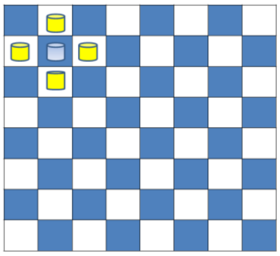


второй король будет бить первого на трех соседних клетках,



а не бить на 64 – 4 = 60 клетках, и таких способов будет 24 • 60.

Если одного короля поставить внутри доски в квадрат 3х3, то он будет бит на четырех клетках,



а не бит на *64 – 5 = 59* клетках, всего способов получается 36 • 59.

Так как расстановки, при которых черный и белый короли меняются местами, считаются разными, то всего способов будет

$$4 \cdot 60 + 24 \cdot 60 + 36 \cdot 59 = 3804$$

Ответ: *3804.*

5. Найдите последнюю цифру числа 2017^{4207}.

Решение: рассмотрим степени числа 7:

$7^1 = 7$

$7^2 = 49$

$7^3 = 343$

$7^4 = 2401$

$7^5 = ...7$

$7^6 = ...9$

$7^7 = ...3$

$7^8 = ...1$

$7^9 = ...7$

Т.е. последняя цифра повторяется через каждые 4 степени. Разделим показатель степени на 4:

$4207 = 1051 \cdot 7 + 3$, т.е. в остатке получаем число 3, значит, последняя цифра искомого числа такая же, как у числа 7^3 – это 3.

Ответ: 3