Всероссийский заочный физико-математический лицей "Авангард"

Задания XVI-й Межрегиональной заочной физико-математической олимпиады для школьников 6-10 классов:

Вариант 9 класса

1. Рассматриваются квадратичные функции $y=x^2+px+q$, для которых $p+q=2009$. Найдите точку, в которой пересекаются все графики таких функций.

I способ.

Подберем такое значение x, чтобы выражение $p + q$ было связано со значением квадратичной функции $y=x^2+px+q$ в точке x.

Возьмем $x=1$.

Тогда

$$y(1) = 1+p+q = 1+2009=2010, \text{ (по условию)}$$

Итак, для всех выписанных квадратичных функций выполнено

$$y(1)=2010.$$

Но это означает, что каждый из графиков этих квадратичных функций проходит через точку *(1, 2010)* координатной плоскости.

II способ.

Пусть $M(x_0,y_0)$ - точка, в которой пересекаются все параболы. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$y_0 = (x_0)^2 + p \cdot x_0 + (2009 - p),$$

где $2009 - p = q$.

Решим уравнение относительно x_0.

$$(x_0)^2 + p \cdot x_0 + (2009 - p - y_0) = 0$$

$$D = p^2 - 4 \cdot (2009 - p - y_0) = 0,$$

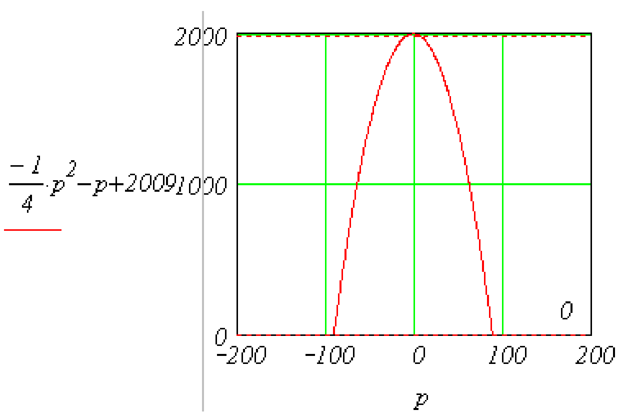
т.к M – единственная точка, тогда:

$$D = p^2 - 4 \cdot (2009 - p - y_0) = 0$$

$$p^2 - 4 \cdot (2009 - p - y_0)$$

$$p^2 - 8036 + 4 \cdot p + 4 \cdot y_0 = 0$$

$$y_0 = \frac{-1}{4} \cdot p^2 - p + 2009$$



Построив график этой функции,

видим, что она имеет максимум в вершине параболы, т.е. при:

$$p = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$$

. При этом $q = 2011$

$$y_0 = \frac{-1}{4} \cdot (-2)^2 - (-2) + 2009 = 2010$$

Абсциссу точки найдем их уравнения:

$$(x_0)^2 + (-2) \cdot x_0 + [2009 - (-2) - 2010] = 0$$

$$(x_0)^2 - 2 \cdot x_0 + 1 = 0$$

$$(x_0 - 1)^2 = 0$$

$$x_0 = 1$$

Итак, в точке: $M(1, 2010)$ пересекаются все графики функций.

2.Найдите сумму коэффициентов многочлена при нечетных степенях:

$2x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2\ ^3 + \ x^3 + x^2 - 1\ ^2\ x^4 - x^2 + 1\ ^2 + \ x + 1\ ^4\ x - 1\ ^4$.

Если подставить в выражение: $x = 1$, то получим:

$$\left(2 \cdot 1^4 - 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 2\right)^3 + \left(1^3 + 1^2 - 1\right)^2 \cdot \left(1^4 - 1^2 + 1\right)^2 + (1 + 1)^4 \cdot (1 - 1)^4 = 9$$

$$f(1) = 9$$

Если подставить в выражение: $x = -1$, то получим:

$$\left[2 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2\right]^3 + \left[(-1)^3 + (-1)^2 - 1\right]^2 \cdot \left[(-1)^4 - (-1)^2 + 1\right]^2 + (-1 + 1)^4 \cdot (-1 - 1)^4 = -63$$

$$f(-1) = -63$$

Если M- сумма коэффициентов при четных степенях, а N – сумма коэффициентов при нечетных степенях, то

$$M + N = f(1) = 9$$

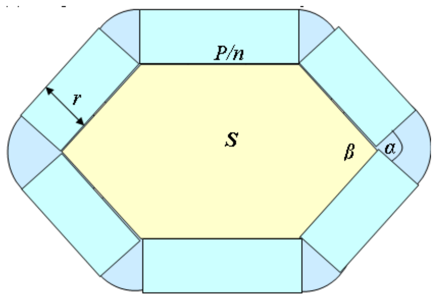
$$M - N = f(-1) = -63$$

Решая систему, получим:

$$2N = 9 + 63 = 72$$

$N = 36$ - сумма коэффициентов при нечетных степенях

3. На листе бумаги нарисован выпуклый многоугольник M периметра P = 5 и площади S = 25. Взяли круг радиуса $r = 1$ с центром в каждой точке, лежащей внутри этого многоугольника, и закрасили его. Найдите площадь закрашенной фигуры F.



Для определенности возьмем шестиугольник.

Закрашенную фигуру F можно разбить на несколько фигур:

1. сам многоугольник M, его площадь:

$$S_1 = 25$$

2. n прямоугольников, площадь каждого из которых: $S_0 = \frac{P}{n} \cdot r$, а общая их площадь:

$$S_2 = n \cdot \left(\frac{P}{n} \cdot r\right) = P \cdot r = 5$$

3. n секторов круга; Найдем сумму углов этих секторов:

$$\alpha = 360^0 - \left(90^0 + 90^0 + \beta\right) = 180^0 - \beta,$$

где β – внутренний угол многоугольника. Сумма внутренних углов многоугольника равна:

$$S_{n\beta} = n \cdot \left(180^0 - \beta\right) = n \cdot \alpha$$

Таким образом, сумма градусных мер всех секторов равна сумме внешних углов многоугольника M, т.е. равна 360^0.

Значит, сектора составляют полный круг радиуса R, следовательно, их суммарная площадь равна площади круга радиуса R, т.е. равна:

$$S_3 = \pi \cdot r^2 = \pi$$

Итак, сложив все найденные площади, получим:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 25 + 5 + \pi = 30 + \pi = 33.142$$

Ответ: $30 + \pi = 33.142$

4. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 \; ^2 = 1 + 16y$.

Очевидно, что для любого значения y найдется 2 значения x, т.е решения уравнения симметричны относительно оси X

Заметим, что левая часть уравнения всегда есть число не отрицательное. Это означает, что

$$1 + 16y \geq 0$$

$$y \geq \frac{-1}{16}.$$

Учитывая, что y – целое, то его наименьшее значение: $y = 0$.

При этом получим значение $x^4 = 1$, т.е

$(-1, 0)$ и $(1, 0)$ - пара решений уравнения.

С другой стороны, число $1 + 16y$ должно быть точным квадратом, т.е.

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = z^2, \text{ где } z = \sqrt{1 + 16y},\ x^2 - y^2 = z$$

При этом число $z > 17$, может быть простым числом:

$$(x-y)\cdot(x+y)=\sqrt{1+16y}$$, где $x-y=1$

Тогда $x=y+1$ и уравнение примет вид:

$$y+1+y=\sqrt{1+16y}$$
$$2y+1=\sqrt{1+16y}$$
$$(2y+1)^2=1+16y$$
$$4\cdot y^2-12y=0$$
$$y\cdot(y-3)=0$$

Первое решение: $y_1=0$ мы уже учли, тогда второй корень уравнения: $y_2=3$, при этом $x_{21}=-4$, $x_{22}=4$

Допустим, что есть другие решения при $|x-y|=k$, тогда возможны 2 случая:

1. $x-y=k$; $x=y+k$

$$k^2\cdot(y+k+y)^2=1+16y$$
$$4\cdot k^2\cdot y^2+4\cdot k^3\cdot y+k^4=1+16y$$
$$4\cdot k^2\cdot y^2+\left(4\cdot k^3-16\right)\cdot y+\left(k^4-1\right)=0$$

Т.к. $k\ge 1$, то решение возможно только, если:

$4\cdot k^3-16\le 0$ или $k^3\le 4$,

Это значит, что $k\le\sqrt[3]{4}<2$, т.е $k=1$

2. $y-x=k$; $x=y-k$

$$k^2\cdot(y-k+y)^2=1+16y$$
$$4\cdot k^2\cdot y^2-4\cdot k^3\cdot y+k^4=1+16y$$
$$4\cdot k^2\cdot y^2-4\cdot\left(k^3+4\right)\cdot y+\left(k^4-1\right)=0$$

Т.к. $k\ge 1$, то решение возможно только, если: $k^3\ge -4$, т.е при любом k.

Найдем дискриминант уравнения:

$$\frac{D}{4}=4\cdot\left(k^3+4\right)^2+4\cdot k^2\cdot\left(k^4-1\right)\ge 0$$
$$4\cdot\left(k^3+4\right)^2+4\cdot k^2\cdot\left(k^4-1\right)=$$
$$=4\cdot\left(2\cdot k^6+8\cdot k^3+16-k^2\right)=$$
$$=4\cdot\left[\left(2k^3\right)^2+2\cdot 2k^3\cdot 4+\left(16-k^2\right)\right],$$

Это означает, что выражение может быть полным квадратом (а уравнение может иметь целые решения) только если $16-k^2=4^2$, т.е при $k=0$

Итак, уравнении не имеет целых решений, кроме: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-4,3)$, $(4,3)$

Ответ: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-4,3)$, $(4,3)$

5. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек?

На шахматной доске имеется

64 клетки

16 диагоналей, содержащих нечетное число клеток и не имеющих общих клеток. Следовательно, число фишек не может быть более, чем

64-16=48.

Можно поставить по фишке на каждую клетку доски, кроме клеток двух главных диагоналей, получится 48 фишек.