

Всероссийский заочный физико-математический лицей "Авангард"

Задания XVI-й Межрегиональной заочной физико-математической олимпиады для школьников 6-10 классов:

Вариант 6 класса

1. Дочери 10 лет, а матери 36 лет. Через сколько лет мать будет вдвое старше дочери?

Пусть через x лет мать будет вдвое старше дочери.

Тогда дочери будет $x + 10$ лет,

А матери - $x + 36$.

Т.к. при этом мать станет в 2 раза старше дочери, то, составим уравнение:

$$2 \cdot (x + 10) = x + 36$$

$$2x + 20 = x + 36$$

$$2x - x = 36 - 20$$

$$x = 16$$

Сделаем проверку: через 16 лет дочери будет 26 лет, а матери – 52,

$$26 \cdot 2 = 52 \quad (\text{верно})$$

Ответ: через 16 лет.

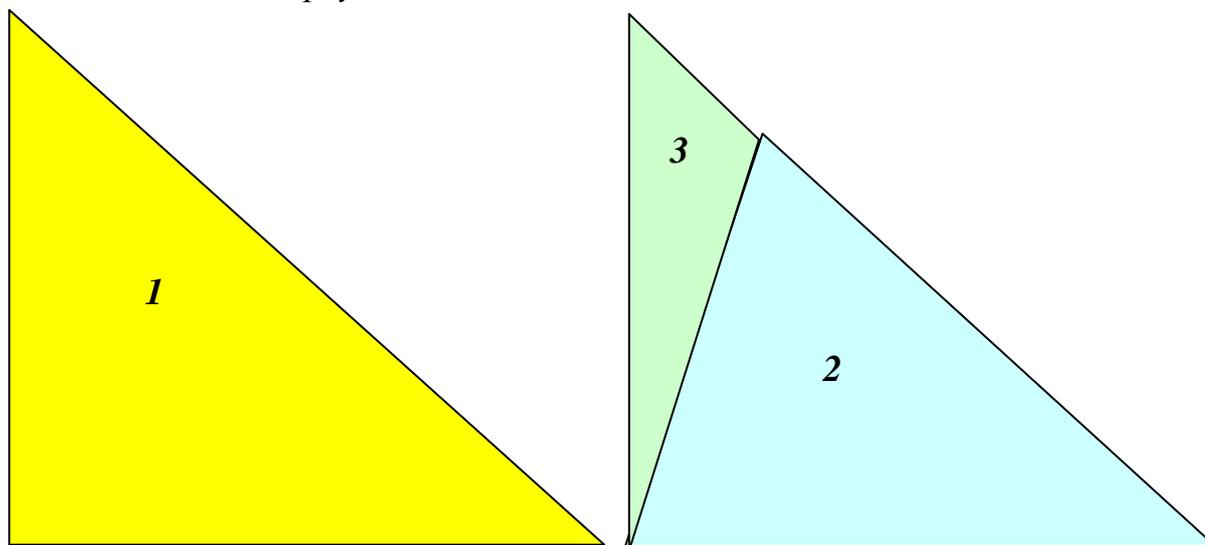
2. Можно ли составить магический квадрат из первых 25 простых чисел? Магический квадрат – это квадратная таблица, заполненная числами, в которой суммы чисел во всех строках и столбцах равны.

Запишем первые 25 простых чисел в магический квадрат:

2	3	5	7	11
...
...
...
...

Каковы бы ни были числа, в каждом столбце и в каждой строке их – 5, т.е. нечетное число. Учтем, что все они, кроме первого – 2 – нечетные, а, значит, сумма их в каждом столбце и в каждой строке, кроме той, которая содержит число 2 (таких всего один столбец и одна строка) – есть число нечетное. Это означает, что, как не подбери числа в строках и столбцах, две суммы окажутся четными числами, а остальные – нечетные, а, значит, они не равны.

3. *Есть три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Саша взял себе один треугольник, а Боря – два оставшихся. Оказалось, что Боря может приложить (без наложения) один из своих треугольников к другому и получить треугольник, равный Сашину. Какой из этих треугольников взял Саша?*



Рассмотрим треугольники:

- 1 – прямоугольный;
- 2 – остроугольный;
- 3 – тупоугольный.

На рисунке показано, как из остроугольного и тупоугольного треугольников можно составить прямоугольный треугольник. Значит, Саша взял прямоугольный треугольник.

4. *В пробирке находятся марсианские амёбы трех типов: А, В и С. Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков ее тип, если исходно амёб типа А было 20 штук, типа В – 21 штука и типа С – 22 штуки?*

Соединим 20 амёб типа С и 20 амёб типа А. Тогда останется:

Амёбы типа А	Амёбы типа В	Амёбы типа С
0	41	2

Соединяя по 2 амёбы типа С и В, будем попеременно получать

Амёбы типа А	Амёбы типа В	Амёбы типа С
0 или 2	Количество уменьшается на 2	2 или 0

В конце концов останется

Амёбы типа А	Амёбы типа В	Амёбы типа С

0 или 2	1	2 или 0
---------	---	---------

Соединив 1 амебу типа А (или С) с 1 амебой типа В останется только 1 амеба типа А и 1 амеба типа С, после их соединения **останется только 1 амеба типа В.**

5. К натуральному числу А приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до А. Найдите А.

Пусть число А – однозначное, тогда после того, как к нему приписали 3 цифры – х, у, z, оно станет равным

$$1000A + 100x + 10y + z$$

1. А- четное. Тогда сумма всех натуральных чисел от 1 до А равна:
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (A - 1) + A =$

$$(1 + A) + (2 + A - 1) + \dots = \frac{A}{2} \cdot (1 + A)$$

2. А – нечетное. Тогда сумма всех натуральных чисел от 1 до А равна:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (A - 1) + A = (1 + A - 1) + (2 + A - 2) + \dots + A =$$

$$= A \cdot \frac{A - 1}{2} + A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (A + 1)$$

В обоих случаях получим уравнение:

$$1000A + 100x + 10y + z = \frac{A}{2} \cdot (1 + A)$$

$$2000A + 200x + 20y + 2z = A \cdot (1 + A)$$

$$A^2 + A - 2000A = 200x + 20y + 2z$$

$$A^2 - 1999A = 200x + 20y + 2z$$

$$A \cdot (A - 1999) = 2 \cdot (100x + 10y + z)$$

Т.к. справа стоит положительное число, то выражение слева положительное число, кроме того:

$$0 \leq 100x + 10y + z \leq 999 \quad \text{и} \quad 0 \leq 2 \cdot (100x + 10y + z) \leq 1998$$

Т.к при $x = y = z = 0$: $100x + 10y + z = 0$

а при $x = y = z = 9$: $100x + 10y + z = 999$

Это означает, что число

$$A > 1999 \quad \text{и}$$

$$0 \leq A \cdot (A - 1999) \leq 1998$$

1) Пусть $A = 2000$. Тогда при $x = 1, y = z = 0$ сумма всех натуральных чисел до 2000 равна:

$$\frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot (2000 + 1) = 2001000$$

Что соответствует условию: если приписать к числу 2000 справа числа 1, 0, 0, то получим - 20001000