2013/2014учебный год

Время проведения:
10-11 класс 5 задач в течение 2,5 часа (150минут)
Каждая, правильно выполненная задача, оценивается в 10 баллов.

11 класс

Задача 1. Свет от Солнца до Земли доходит за время $t = 500$ *c*. Найдите массу Солнца. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ *Н м*^{2}/*кг*^{2}, скорость света в вакууме $c = 3\ 10^8$ *м/с*; а продолжительность *1* года $T = 3{,}14 \cdot 10^7$ *с*.

Возможное решение

$$t = 500c$$
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} H \cdot \frac{м^2}{кг^2}$$
$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{c}$$
$$T = 3.14 \cdot 10^7 c$$
$$M - ?$$

Расстояние от Солнца до Земли найдем, исходя из скорости света:

$$R = c \cdot t, \qquad R = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{c} \cdot 500c = 1.5\,10^{11} м$$

По II закону Ньютона сила притяжения Земли к Солнцу (по закону всемирного тяготения) сообщает центростремительное ускорение:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot a \qquad \text{или} \qquad G \cdot \frac{M}{R^2} = a \qquad (1)$$

где m – масса Земли,
a – центростремительное ускорение, равное:

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2}$$

Подставим числовые данные:

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(1.5 \times 10^{11} м\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} H \cdot \frac{м^2}{кг^2} \cdot \left(3.14 \cdot 10^7 c\right)^2} = 2.03 \cdot 10^{30} кг$$

Ответ: 2,03·10^{30} кг.

Задача 2. Идеальный газ массой $\boldsymbol{m}$, находящийся первоначально при температуре $\boldsymbol{T}$, охлаждается при постоянном объеме так, что его давление падает в $\boldsymbol{n}$ раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна начальной. Найдите совершенную газом работу. Молярная масса газа равна $\boldsymbol{\mu}$.

Возможное решение

$i = 3$

m

μ

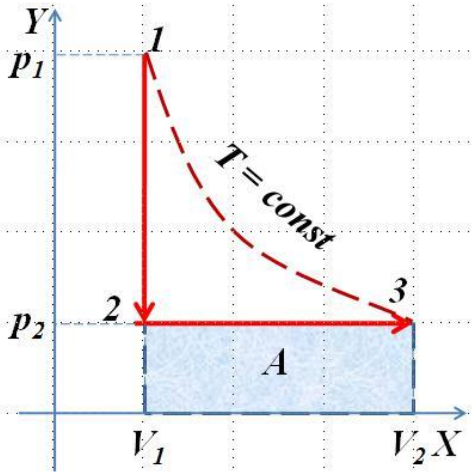
$R = 8.31 \dfrac{Дж}{моль \cdot K}$

$t_1 = T$

$T_1 = T_3$

$\dfrac{p_1}{p_2} = n$

A - ?



Нарисуем диаграмму процессов (см. рисунок). Т.к. на участке 1 – 2 работа не совершается (процесс изохорный), то совершенная газом работа равна площади фигуры под графиком 2 – 3 на рисунке (заштрихованная область), поэтому:

$$A = p_2 \cdot (V_2 - V_1) \qquad (1)$$

Для того, чтобы выразить давление и объем в точках 1, 2 и 3 используем уравнение Клапейрона-Менделеева и учтем, что т.к. в конечном состоянии температура газа равна начальной, значит, точки 1 и 3 принадлежат изотерме (см. рисунок).

В точке 1:

$$p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T \qquad (2)$$

В точке 2 выполняются условия:

$$\begin{cases} p_2 \cdot V_1 = \dfrac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_2 \\ \dfrac{p_2}{T_2} = const = \dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_1}{T} \\ \dfrac{p_1}{p_2} = n \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} V_1 = \dfrac{m}{\mu} \cdot R \cdot \dfrac{T_2}{p_2} = \dfrac{m}{\mu} \cdot R \cdot \dfrac{T}{p_1} \\ T_2 = \dfrac{p_2}{p_1} \cdot T = \dfrac{1}{n} \cdot T \\ p_2 = \dfrac{p_1}{n} \end{cases} \qquad (3)$$

В точке 3:

$$p_2 \cdot V_2 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T, \text{ откуда } V_2 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{T}{p_2} = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{nT}{p_1} \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (1) выражение для $\boldsymbol{p_2}$ и $\boldsymbol{V_1}$ из системы (3), а значение выражение для $\boldsymbol{V_2}$ из уравнения (4), получим:

$$A = \frac{p_1}{n} \cdot \left(\frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{nT}{p_1} - \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{T}{p_1} \right) = \frac{p_1}{n} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{T}{p_1} \cdot (n-1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T$$

Ответ: $\boldsymbol{A = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T}$.

Задача 3. Деревянный брусок, движущийся вертикально, падает со скоростью ***3 м/с*** на горизонтальную ленту транспортёра, движущегося со скоростью ***1 м/с***. Брусок после удара не подскакивает. При каком коэффициенте трения брусок не будет проскальзывать по транспортёру?

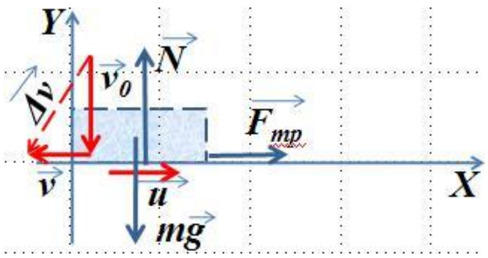
$v_0 = 3\,\frac{м}{с}$

$u = 1\,\frac{м}{с}$

$g = 10\,\frac{м}{с^2}$

μ - ?

Возможное решение



Скорость бруска относительно транспортера направлена противоположно движению транспортера и равна в момент удара скорости транспортёра $v = u$ (см. рисунок), а изменение импульса:

$$\Delta p = m \cdot \left(\sqrt{v^2 + u^2}\right)$$

Т.к. брусок после удара не подскакивает, значит, по II закону Ньютона импульс равнодействующей силы реакции опоры и силы трения:

$$\sqrt{N^2 + \left(F_{тр}\right)^2} \cdot \Delta t = m \cdot \left(\sqrt{v^2 + u^2}\right) \qquad (1)$$

С другой стороны, сила реакции опоры связана с силой тяжести и силой трения:

$$\begin{cases} m \cdot g = N \\ F_{тр} = \mu \cdot N \end{cases}, \text{ откуда } N = \frac{F_{тр}}{\mu} \qquad (2)$$

Тогда выражение (1) запишется в виде:

$$\sqrt{(m \cdot g)^2 + \left(\mu \cdot m \cdot g\right)^2} \cdot \Delta t = m \cdot \left(\sqrt{v^2 + u^2}\right) \quad \text{откуда} \quad \mu = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - g^2 \cdot \Delta t^2}}{g \cdot \Delta t} \qquad (3)$$

Принимая ***Δt = 1 с*** получим:

$$\mu = \frac{\sqrt{\left(3\,\frac{м}{с}\right)^2 + \left(1\,\frac{м}{с}\right)^2 - \left(10\,\frac{м}{с^2}\right)^2 \cdot (1с)^2}}{10\,\frac{м}{с^2} \cdot 1с} = 0.95$$

Ответ: μ = 0,95.

2013/2014учебный год

Задача 4. От груза, висящего на пружине жёсткостью k, отрывается часть массой m. На какую максимальную высоту сместится оставшийся груз?

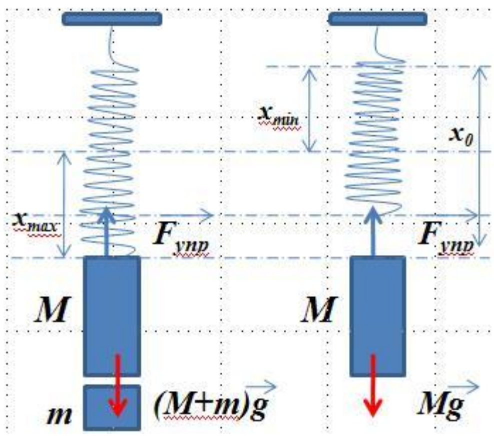
Возможное решение

k

m

$g = 10 \frac{м}{c^2}$

Δh - ?



Обозхначим (см. рисунок):

M - масса того, что осталось на пружинке и колеблется.

x_{max} - расстояние от точки равновесия пружины (собственно пружины без груза) до груза М в нижней точке, то есть в начальный момент,

x_{min} - расстояние от точки равновесия пружины до груза М в верхней точке.

Равновесие в начальный момент:

$$(M+m) \cdot g = k \cdot x_{max},$$

откуда

$$x_{max} = \frac{(M+m) \cdot g}{k}$$

Начальная энергия пружины

$$E_{p0} = \frac{k \cdot (x_{max})^2}{2}$$

идет на изменение потенциальной энергии тяготения:

$$\Delta E_p = M \cdot g \cdot (x_{max} - x_{min})$$

и потенциальную энергию упругости в верхней точке после отрыва части массы $\boldsymbol{m}$ (см. рисунок):

$$E_p = \frac{k \cdot (x_{min})^2}{2}$$

Таким образом, по закону сохранения энергии, имеем:

$$\frac{k \cdot (x_{max})^2}{2} = M \cdot g \cdot (x_{max} - x_{min}) + \frac{k \cdot (x_{min})^2}{2} \qquad (1)$$

Учтем, что

$$\Delta h = x_{max} - x_{min}, \quad \text{т.е.} \quad x_{min} = x_{max} - \Delta h = \frac{(M+m) \cdot g}{k} - \Delta h \qquad (2)$$

Тогда выражение (1) запишется в виде:

$$\frac{k \cdot [(M+m) \cdot g]^2}{2 \cdot k^2} = M \cdot g \cdot \Delta h + \frac{k \cdot [(M+m) \cdot g - \Delta h \cdot k]^2}{2 \cdot k^2}$$

Преобразовывая выражение, получим:

$$\Delta h^2 \cdot k^2 - 2 \cdot g \cdot m \cdot \Delta h \cdot k = 0$$

откуда

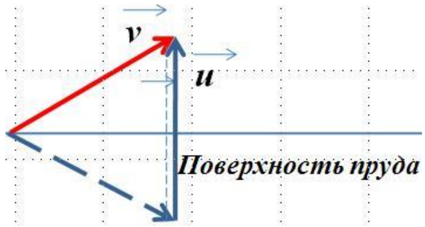
$$\Delta h = \frac{2 \cdot g \cdot m}{k}$$

Ответ: $\Delta h = \frac{2mg}{k}$.

Задача 5. Однажды, пролетая над зеркально ровной поверхностью пруда, Карлсон обратил внимание на то, что его скорость относительно берега в точности равна его скорости удаления от своего изображения в воде. Под каким углом к поверхности воды летел Карлсон?

Возможное решение

Введем обозначения (см. рисунок):



v – скорость Карлсона относительно берега,

u– скорость Карлсона относительно изображения.

Как видно из рисунка, равенство указанных скоростей возможно только в случае, если 3 скорости (третья скорость – скорость изображения) образуют равносторонний треугольник (с величиной угла 60^0), причем, поверхность воды является для него биссектрисой (а также медианой и высотой), а значит, Карлсон летел под углом к поверхности воды:

$$\alpha = \frac{60^0}{2} = 30^0$$

***Ответ:** 30^0.*